数理解析研究所講究録
1042巻 1998年 191-192

位相的な Julia 集合と pinched circle model について

大阪市大 理 吉田雅通 (Masamichi Yoshida)

T を S^2 からそれ自身への連続で有限対1の開写像とし、さらにその degree は2以上とする。d で S^2 上の球面距離をあらわすことにする。T の Fatou 集合 F_T を

$$F_T = int\ \{x \in S^2 \mid \{T^n\}_{n\geq 1} \text{ が } x \text{ において同程度連続}\}\ (\text{ただし、}int \text{ は } (S^2, d) \text{ での内部})$$

と定義し、Julia 集合を F_T の補集合と定義する。従って、F_T は T の下で完全不変となる。さらに、T の除外点集合 $Exc(T)$ を

$$Exc(T) = \{x \in S^2 \mid \sharp(\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(x)) < \infty\}$$

で定義すれば、Riemann-Hurwitz の公式より、$\sharp Exc(T) \leq 2$ となる。まず、次の仮定をおく。

仮定 1。$\emptyset \neq J_T \subset S^2 \setminus Exc(T)$ かつ、T は位相的な多項式である。

ここで位相的な多項式とは、$T^{-1}(x_\infty) = \{x_\infty\}$ をみたす S^2 上の点 x_∞ があることとする。従って x_∞ は F_T の点となり、さらに x_∞ を含む F_T の連結成分を X とすると X は T の下で完全不変となる。さらに、次の仮定をおく。

仮定 2。$\forall x \in S^2 \setminus Exc(T),\ cl\ (\cup_{n\geq 0} T^{-n}(x)) \supset J_T$ (ただし、cl は (S^2, d) での閉包)。

この仮定の下で、$\partial X = J_T$ がいえる。
ここで、X 上に relative metric d_X を導入する。各点 $x, y \in X$ に対して、

$$d_X(x, y) = \inf\{diam\ C \mid \{x, y\} \subset C \subset X \text{ かつ } C \text{ は連結}\}$$

ただし、$diam\ C$ は C の d の下での直径とする。すると、d_X は X 上の新しい距離となり、明らかに、$d(x,y) \leq d_X(x,y)$ をみたす。従って、自然な埋め込み $j_X : (X, d_X) \hookrightarrow (X \cup J_T, d)$ は一様連続となるので、その連続拡張 $w_X : (\overline{X}, \overline{d_X}) \to (X \cup J_T, d)$ (ただし、$(\overline{X}, \overline{d_X})$ は (X, d_X) の完備化) が一意的に定まる。さらに、T も (X, d_X) からそれ自身への写像として一様連続であることが示されるので、その連続拡張 $S_X : (\overline{X}, \overline{d_X}) \to (\overline{X}, \overline{d_X})$ が一意的に定まる。明らかに $w_X \circ S_X = T \circ w_X$ をみたすので、

$$(*) \quad \forall \overline{x} \in \overline{X},\ w_X^{-1} w_X(S_X^{-1}\overline{x}) \subset S_X^{-1}(w_X^{-1} w_X(\overline{x}))$$

となる。X は自然に $\overline{X}$ の部分集合とみなせるので、$\overline{X} \setminus X$ を$\overline{\partial}X$ とかけば、力学系 $(\overline{\partial}X, S_X)$ は (J_T, T) の canonical extension といえる。
Whyburn の結果 ([1] Chapt.8, theorem 9.1) により、w_X は $\overline{X}$ 上で light (つまり、$\overline{X}$ 上の各点 $\overline{x}$ に対し、$w_X^{-1} w_X(\overline{x})$ は完全不連結) となる。従って、T が有限対1であることから、$S_X : \overline{X} \to \overline{X}$ も light となる。さらに、次の仮定をおく。

仮定 3。J_T は連結かつ局所連結である。

この仮定により、$w_X : \overline{\partial}X \to J_T$ は全射となる。さらに、Whyburn の定理 ([1] Chapt.8, theorem 9.8) により、$(\overline{X}, \overline{d_X})$ は単位閉円板 $\overline{\mathbf{D}}$ と同相になる (より正確に、$\psi(X) = \mathbf{D}$ かつ $\psi(\overline{\partial}X) = S^1$ をみたす同相写像$\psi : \overline{X} \to \overline{\mathbf{D}}$ がある)。さらに、S_X の lightness を用いることで、

補題 1。 $S_X : \overline{X} \to \overline{X}$ は開写像となり、さらに $S_X : \overline{\partial}X \to \overline{\partial}X$ は k 対 1 の写像となる（k はある自然数)。

が示される。さらに、Whyburn の結果（[1] Chapt.8, theorem 9.8）より、w_X は $\overline{\partial}X$ 上で non-alternating（つまり、$w_X(\overline{x}) \neq w_X(\overline{y})$ をみたす $\overline{\partial}X$ 上の点 $\overline{x}, \overline{y}$ に対して、$w_X^{-1}w_X(\overline{y})$ は $\overline{y}$ を含む $\overline{\partial}X \setminus w_X^{-1}w_X(\overline{x})$ の連結成分に含まれる）である。最後に、次の仮定をおく（See (*))。

仮定 4。

$$\forall \overline{x} \in \overline{\partial}X,\ w_X^{-1}w_X(S_X^{-1}\overline{x}) \supset S_X^{-1}(w_X^{-1}w_X(\overline{x}))$$

今までの仮定および w_X の non-alternating property を用いて、次の結果を得る。

定理 1。 T を S^2 からそれ自身への連続で有限対 1 の開写像とし、さらにその *degree* は 2 以上で仮定 1 から 4 をみたすものとする。もし $S_X : \overline{\partial}X \to \overline{\partial}X$ が不動点を 1 つしかもたないとすると、ある連続、*light*、*non-alternating* かつ全射な写像 $\Phi : S^1 \to J_T$ が存在して、次をみたす。

$$\forall z \in S^1,\ \Phi(z^2) = T \circ \Phi(z)$$

最後に、補足として、上の (*) は Thurston の invariant lamination でいうところの forward invariance に対応し、仮定 4 は backward invariance に対応している。

参考文献

[1] G. T. Whyburn. *Analytic topology*. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., Vol. 28. 1942